

大學入學考試中心
105 學年度學科能力測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{8}$ 與第 19 列的 $\frac{8}{8}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
18	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
19	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案

卡的第 20 列的 $\frac{-}{50}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{50}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
20	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐
21	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

- 3 1. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式，已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 時有最小值 1 且 $f(3)=3$ 。請問 $f(1)$ 之值為下列哪一選項？
(1) 5 (2) 2 (3) 3
(4) 4 (5) 條件不足，無法確定
- 5 2. 請問 $\sin 73^\circ$ 、 $\sin 146^\circ$ 、 $\sin 219^\circ$ 、 $\sin 292^\circ$ 、 $\sin 365^\circ$ 這五個數值的中位數是哪一個？
(1) $\sin 73^\circ$ (2) $\sin 146^\circ$ (3) $\sin 219^\circ$
(4) $\sin 292^\circ$ (5) $\sin 365^\circ$
- 2 3. 坐標平面上兩圖形 Γ_1, Γ_2 的方程式分別為： $\Gamma_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 、 $\Gamma_2: (x+y)^2 = 1$ 。請問 Γ_1, Γ_2 共有幾個交點？
(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 0 個
- 1 4. 放射性物質的半衰期 T 定義為每經過時間 T ，該物質的質量會衰退成原來的一半。鉛製容器中有兩種放射性物質 A 、 B ，開始紀錄時容器中物質 A 的質量為物質 B 的兩倍，而 120 小時後兩種物質的質量相同。已知物質 A 的半衰期為 7.5 小時，請問物質 B 的半衰期為幾小時？
(1) 8 小時 (2) 10 小時 (3) 12 小時 (4) 15 小時 (5) 20 小時

- 2 5. 坐標空間中一質點自點 $P(1,1,1)$ 沿著方向 $\vec{a} = (1,2,2)$ 等速直線前進，經過 5 秒後剛好到達平面 $x - y + 3z = 28$ 上，立即轉向沿著方向 $\vec{b} = (-2,2,-1)$ 依同樣的速率等速直線前進。請問再經過幾秒此質點會剛好到達平面 $x = 2$ 上？
- (1) 1 秒
(2) 2 秒
(3) 3 秒
(4) 4 秒
(5) 永遠不會到達
- 4 6. 設 $\{a_n\}$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 80$ ，前五個奇數項的和為 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$ ，請選出首項 a_1 的正確範圍。
- (1) $a_1 < 80$
(2) $80 \leq a_1 < 90$
(3) $90 \leq a_1 < 100$
(4) $100 \leq a_1 < 110$
(5) $110 \leq a_1$

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

- 2 7. 下列各方程式中，請選出有實數解的選項。
- 3 (1) $|x| + |x - 5| = 1$
- 5 (2) $|x| + |x - 5| = 6$
- (3) $|x| - |x - 5| = 1$
- (4) $|x| - |x - 5| = 6$
- (5) $|x| - |x - 5| = -1$

1.
2.
4

8. 下面是甲、乙兩個商場的奇異果以及蘋果不同包裝的價格表，例如：甲商場奇異果價格「35 元/一袋 2 顆」表示每一袋有 2 顆奇異果，價格 35 元。

甲商場售價

奇異果價格	20 元/一袋 1 顆	35 元/一袋 2 顆	80 元/一袋 5 顆	100 元/一袋 6 顆
蘋果價格	45 元/一袋 1 顆	130 元/一袋 3 顆	260 元/一袋 6 顆	340 元/一袋 8 顆

乙商場售價

奇異果價格	18 元/一袋 1 顆	50 元/一袋 3 顆	65 元/一袋 4 顆	95 元/一袋 6 顆
蘋果價格	50 元/一袋 1 顆	190 元/一袋 4 顆	280 元/一袋 6 顆	420 元/一袋 10 顆

依據上述數據，請選出正確的選項。

- (1) 在甲商場買一袋 3 顆裝的蘋果所需金額低於買三袋 1 顆裝的蘋果
- (2) 乙商場的奇異果售價，一袋裝越多顆者，其每顆單價越低
- (3) 若只想買奇異果，則在甲商場花 500 元最多可以買到 30 顆奇異果
- (4) 如果要買 12 顆奇異果和 4 顆蘋果，在甲商場所需最少金額低於在乙商場所需最少金額
- (5) 無論要買多少顆蘋果，在甲商場所需最少金額都低於在乙商場所需最少金額

3.
5

9. 下列各直線中，請選出和 z 軸互為歪斜線的選項。

(1) $L_1: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

(2) $L_2: \begin{cases} y=0 \\ x+z=1 \end{cases}$

(3) $L_3: \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$

(4) $L_4: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

(5) $L_5: \begin{cases} y=1 \\ z=1 \end{cases}$

10. 設 a 、 b 、 c 皆為正整數，考慮多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ 。請選出正確的選項。

(1) $f(x) = 0$ 無正根

(2) $f(x) = 0$ 一定有實根

(3) $f(x) = 0$ 一定有虛根

(4) $f(1) + f(-1)$ 的值是偶數

(5) 若 $a + c > b + 3$ ，則 $f(x) = 0$ 有一根介於 -1 與 0 之間

1.
4.
5

1. 2. 4.
11. 一個 41 人的班級某次數學考試，每個人的成績都未超過 59 分。老師決定以下列方式調整成績：原始成績為 x 分的學生，新成績調整為 $40\log_{10}(\frac{x+1}{10})+60$ 分（四捨五入到整數）。請選出正確的選項。
- (1) 若某人原始成績是 9 分，則新成績為 60 分
 - (2) 若某人原始成績超過 20 分，則其新成績超過 70 分
 - (3) 調整後全班成績的全距比原始成績的全距大
 - (4) 已知小文的原始成績恰等於全班原始成績的中位數，則小文的新成績仍然等於調整後全班成績的中位數
 - (5) 已知小美的原始成績恰等於全班原始成績的平均，則小美的新成績仍然等於調整後全班成績的平均（四捨五入到整數）
2. 5.
12. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = 20^\circ$ 、 $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BC} = 4$ 。請選出正確的選項。
- (1) 可以確定 $\angle B$ 的餘弦值
 - (2) 可以確定 $\angle C$ 的正弦值
 - (3) 可以確定 $\triangle ABC$ 的面積
 - (4) 可以確定 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑
 - (5) 可以確定 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑
4. 5.
13. 甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A 、 B 、 C 、 D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A 、 B 、 C 、 D 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。
- (1) A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
 - (2) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
 - (3) A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率
 - (4) B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率
 - (5) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14–31）。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 考慮每個元（或稱元素）只能是 0 或 1 的 2×3 階矩陣，且它的第一列與第二列不相同且各列的元素不能全為零，這樣的矩陣共有 $\frac{(14)(15)}{42}$ 個。

- B. 坐標平面上 O 為原點，設 $\vec{u} = (1, 2)$ 、 $\vec{v} = (3, 4)$ 。令 Ω 為滿足 $\vec{OP} = x\vec{u} + y\vec{v}$ 的所有點 P 所形成的區域，其中 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 、 $-3 \leq y \leq \frac{1}{2}$ ，則 Ω 的面積為 $\frac{(16)(17)}{72}$ 平方單位。
(化成最簡分數)

- C. 從橢圓 Γ 的兩焦點分別作垂直於長軸的直線，交橢圓於四點。已知連此四點得一個邊長為 2 的正方形，則 Γ 的長軸長為 $\frac{(18)}{1} + \frac{\sqrt{(19)}}{5}$ 。

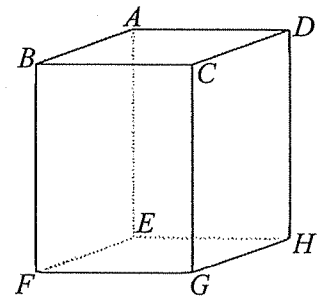
- D. 線性方程組 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=6 \\ x-y=6 \\ x-2y-z=8 \end{cases}$ 經高斯消去法計算後，其增廣矩陣可化簡為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ ，則 $a = \frac{(20)}{1}$ 、 $b = \frac{(21)}{4}$ 、 $c = \frac{(22)}{1}$ 、 $d = \frac{(23)(24)}{-2}$ 。

- E. 設 a 為一實數，已知在第一象限滿足聯立不等式 $\begin{cases} x-3y \leq a \\ x+2y \leq 14 \end{cases}$ 的所有點所形成之區域面積為 $\frac{213}{5}$ 平方單位，則 $a = \frac{25}{6}$ 。

- F. 投擲一公正骰子三次，所得的點數依序為 a, b, c 。在 b 為奇數的條件下，行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ 的機率為 $\frac{26 \cdot 27}{28 \cdot 29}$ 。（化成最簡分數）
- $\frac{19}{36}$

- G. 如右圖所示， $ABCD-EFGH$ 為一長方體。若平面 BDG 上一點 P 滿足 $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + 2\vec{AD} + a\vec{AE}$ ，則實數 $a = \frac{30}{31}$ 。（化成最簡分數）

$\frac{4}{3}$



參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n \mu_X^2}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n \sigma_X \sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$