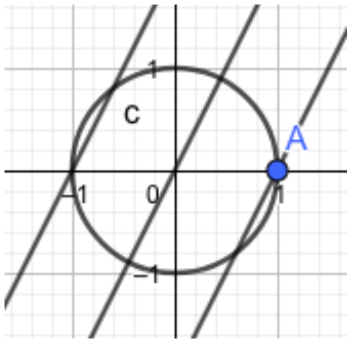
108 學年度學科能力測驗
數學考科解析

01. (3)

如圖，圓Γ之圓心$C(0,0)$在L上，依對稱性有三個交點



02. (1)

$x^3-x^2+4x-4=0$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+4)=0$

$\Rightarrow x=\pm 2i,1$

03. (3)

$2^k4^m8^n=512$

$\Rightarrow 2^k2^{2m}2^{3n}=2^9$

$\Rightarrow 2^{k+2m+3n}=2^9$

$\Rightarrow k+2m+3n=9$

符合題目敘述之(k,m,n)共有三組$(4,1,1),(2,2,1),(1,1,2)$

04. (5)

白菜可選豬雞牛3種

豆腐與香菇亦是如此且三者獨立

故有$3\times3\times3=27$種分配法

05. (4)

$\log 100\log b+\log 100+\log b=7$

$\Rightarrow 2\log b+2+\log b=7$

$\Rightarrow \log b=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow b=10^{\frac{5}{3}}$

又$10^{\frac{3}{2}}<10^{\frac{5}{3}}<10^2$

故$10\sqrt{10}<b<100$

06. (2)

題目敘述相關係數 $r=-0.99\to$ 當 $|r|$ 趨近於1時，數據的連線可視為一直線

因 $11°C\to 512$ 杯且 $13°C\to 437$ 杯，得出每下降 $2°C$ 上升 $512-437=75$ 杯

則氣溫 $8°C$ 時 $512+75\times\frac{3}{2}\approx 625$

07. (1)(4)

(1) $\because b_n=-a_n$

$\therefore b_{n+1}-b_n=-a_{n+1}-(-a_n)=-(a_n+d)+a_n=-d$

b_n 是公差為負數的等差數列

$\therefore b_1>b_2>b_3>\ldots$

(2)反例: $a_1=-1,a_2=0,a_3=1,\ldots\ldots$

$c_1=(a_1)^2=1,c_2=(a_2)^2=0$

則 $c_1>c_2$

(3) $d_n=a_n+a_{n+1}=2a_n+d$

$d_{n+1}-d_n=(2a_{n+1}+d)-(2a_n+d)=2(a_{n+1}-a_n)=2d$

公差應為 $2d$

(4) $e_{n+1}-e_n=(a_{n+1}+n+1)-(a_n+n)=a_{n+1}-a_n+1=d+1$

(5) $f_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$f_{n+1}-f_n=((n+1)a_1+\frac{(n+1)n}{2}d)-(na_1+\frac{n(n-1)}{2}d)=a_1+nd$

公差應為 a_1+nd

08. (4)(5)

(1)錯誤,甲乙反向而行,他們不會相遇

(2)錯誤,乙的速率大於甲,乙會追上甲

(3)錯誤, $\because a>1$,相遇的位置介於 -8 與 1 之間,乙未必先到達原點

(4)正確,乙的速率大於甲,甲乙漸行漸遠

(5)正確, $|-2-(-8)|:|-2-10|=1:2$, $a=2$

09. (3)(5)

樣本空間數 $C_2^7 = 21$

(1)子空間數 $(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)$ 共 4 種,得 $\frac{4}{21}$,錯誤

(2)子空間數 $(1,2),(1,3)$ 共 2 種,得 $\frac{2}{21}$,錯誤

(3)奇數與偶數各取一個: $C_1^4 \times C_1^3 = 12, \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$,正確

(4)兩個奇數或兩個偶數: $C_2^4 + C_2^3 = 9, \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$,錯誤

(5)兩個奇數 $C_2^4 = 6, \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$,正確

10. (1)(2)

ΔABC 中, $50^\circ \le \angle A < \angle B \le 60^\circ \Rightarrow 60^\circ < \angle A + \angle B < 80^\circ$

故 $\angle C > \angle B > \angle A$ 且為銳角三角形

(1) $\sin A < \sin B$,因 $\angle A < \angle B$ 且是銳角三角形

(2) $\sin B < \sin C$,因 $\angle B < \angle C$ 且是銳角三角形

(3) $\cos A > \cos B$,因 $\angle A < \angle B$

(4) $\sin C > \cos C$,因 $\angle C > 45^\circ$

(5) $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{BC}}{\sin A}$ 且 $\sin A < \sin C \Rightarrow \overline{AB} > \overline{BC}$

11. (3)(5)

(1)錯誤, $\frac{280}{500} < 0.6$

(2)錯誤, $\frac{C_2^{220}}{C_2^{500}} = \frac{220 \times 219}{500 \times 499} < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

(3)正確, $C_1^2 \times \frac{45}{120} \times \frac{75}{119}$

(4)錯誤, $\frac{380}{500} > 0.75$

(5)正確, $x + 3.5x = 4.5x = 120$, $x \approx 26.6, 3.5x \approx 93.1$

12. (1)(2)(5)

$f_1=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x),\deg(r_1(x))\le 1$

$f_2=g(x)\cdot q_2(x)+r_2(x),\deg(r_2(x))\le 1$

(1)正確, $-f_1=g(x)(-q_1(x))+(-r_1(x))$

(2)正確, $f_1+f_2=g(x)\cdot(q_1(x)+q_2(x))+(r_1(x)+r_2(x))$

(3)錯誤, $f_1\cdot f_2=g^2(x)\cdot q_1(x)\cdot q_2(x)+g(x)(r_1(x)+r_2(x))+r_1(x)\cdot r_2(x)$, $\deg(r_1(x)\cdot r_2(x))\le 2$

(4)錯誤, $f_1(x)=-3g(x)\cdot(-\frac{1}{3})q_1(x)+r_1(x)$

(5)正確, $f_1(x)r_2(x)+f_2(x)r_1(x)=g(x)[q_1(x)r_2(x)-q_2(x)r_1(x)]$

13. (3)(4)

P 之法向量可取 $(1,2,3)\times(-1,2,3)=(0,-6,4)//(0,3,-2)$

(1)錯誤, $(0,3,2)$ 不平行 $(0,3,-2)$

(2)錯誤, xy 平面法向量 $=(0,0,1)$, $(0,0,1)\cdot(0,3,-2)\neq 0$

(3)正確,P 之方程式: $3y-2z=0$, $(0,4,6)$ 代入成立

(4)正確, x 軸上的點 $(x,0,0)$ 帶入 $3y-2z=0$,成立

(5)錯誤, $d=\frac{|3\cdot 1-2\cdot 1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\neq 1$

A. -4

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-y-3\\ 2x+4y-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ -6\end{bmatrix}$$

$3x-y-3=6,2x+4y-1=-6$ 解得 $x=\frac{1}{2},y=-\frac{3}{2},x+3y=-4$

B. $\frac{29}{4}$

四邊形 ABCD 為一菱形，其面積為對角線相乘除 2，兩對角線分別為橢圓之短軸及長軸。

即 $\frac{2a\times 2b}{2}=58$,$2ab=58,ab=29$ 其中 $b=4$ ，所以 $a=\frac{49}{4}$

C. 105

$\overline{AB}$ 長度對大會發生在跑道曲線部分之直徑與足球練習場之寬相同時，

即 $400=\frac{2\pi\times 60}{2}+2\overline{AB},\overline{AB}=200-30\pi\approx 105$

D. 215

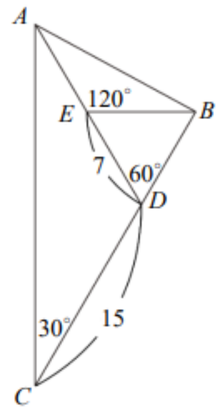
$$\begin{cases} x+y+224=765 \\ x+z+224=537 \\ y+z+224=648 \end{cases} \quad 得\ x=215$$

E. 13

$\angle BED=60°=\angle BDE \Rightarrow \Delta BDE$ 為正 $\Delta \Rightarrow \overline{EB}=7$

$\angle ADC=120° \Rightarrow \angle DAC=30° \Rightarrow \overline{AD}=\overline{DC} \Rightarrow \overline{AE}=8$

ΔAEB 中利用餘弦定理 $\dfrac{7^2+8^2-\overline{AB}^2}{2\times7\times8}=\cos120°=-\dfrac{1}{2}$, $\overline{AB}^2=169, \overline{AB}=13$



F. $2\sqrt{3}$

若邊長$=d$，則正立方體中距離最遠的兩點為 $\sqrt{3}d$，此時 d 最小，

$\sqrt{3}d=6$ (平面 $z=0$ 和 $z=6$ 的距離為 6)， $d=2\sqrt{3}$

G. -3

令 $A(0,0), C(1,0), B(a,b), D(a,b+1) \Rightarrow \overline{AC}=(1,0), \overline{BD}=(0,1)$

$\overline{BC}=(1-a,-b)=\overline{AB}+\overline{AD}=(a,b)+(a,b+1)=(2a,2b+1), 3a=1, 3b+1=0, (a,b)=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})\cdot(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=-\frac{1}{9}=|\overline{AB}||\overline{AD}|\cos\angle BAD$

$\cos\angle BAD=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \tan\angle BAD=-3$