109 學年度學科能力測驗
數學考科解析

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 正解：**2**

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\sin\beta = \frac{5}{13}$，$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{13} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\beta < \sin 30° < \sin\alpha$

2. 正解：**1**

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$

3. 正解：**2**

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}$

$(2)\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$

∴ 在ΔODE 內

4. 正解：**5**

$\mathrm{BA} = \mathrm{A} + A^2 + I = \begin{bmatrix}1 & 1\\3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 5\\15 & 19\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 6\\18 & 24\end{bmatrix}$

5. 正解：**3**

$\sqrt{101} \cong 10.\sim$，與 $\sqrt{101}$ 距離小於 5，$5.\sim < x < 15.\sim \Rightarrow 6 < x \leq 15$
$\sqrt{38} \cong 6.\sim$，與 $\sqrt{38}$ 距離小於 3，$x < 3.\sim$ 或 $x > 9.\sim \Rightarrow x \leq 3$ 或 $x \geq 10$

6. **正解：4**

即$\log a^2b>1\Rightarrow a^2b>10$

$(a,b)=(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$

$(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$

$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$

$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$

共 27 個

7. **正解：4**

這個函數是奇函數

P、Q：①為相同點　②對(0,0)對稱

即由 $P(\cos\theta,\sin\theta)$得 $Q(-\cos\theta,-\sin\theta)$

二、多選題

8. **正解：12**

(1) 2 不符合 A，但符合 B ⇒得 100 元。

(2) 3 符合 A，但不符合 B ⇒得 100 元。

(3) 4 不符合 A，也不符合 B ⇒得 0 元。

(4) 5 符合 A，也符合 B ⇒得 200 元。

(5) 6 不符合 A，也不符合 B ⇒得 0 元。

9. **正解：45**

$\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}$ 夾$60°,120°,180°$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cdot cos\theta=4\cdot cos60°=2$

或 $=4\cdot\cos120°=-2$

或 $=4\cdot\cos180°=-4$

10. **正解：14**

(1) 由 $f(0)=-4$ 可知y截距為-4

(2) 令$t=x^2$

$\Rightarrow f(x)=3t^2+11t-4$

$\Rightarrow$ 解得 $t=\dfrac{1}{3}or-4$

$\Rightarrow$故$x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$,$\pm2i$

(3) 和(2)相同
(4)見(2)。
(5)見(2)。

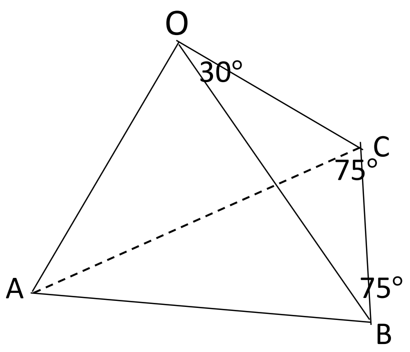
11. **正解：35**

(1) 由$loga + logc = 2logb$ 可知ac=b^2
(2) $1 < loga = 1.1 < 2$
$\Rightarrow log10 < loga < log100$
$\Rightarrow 10 < a < 100$
(3) $3 < logc = 3.3 < 3.3010$
$\Rightarrow log1000 < logc < log1000 + log2$
$\Rightarrow 1000 < c < 2000$
(4)由$logb = 2loga$ 可知 $b = a^2$
(5)由(1)可知

12. **正解：13**

(1) 正確，由圖可知。
(2) 2015 年→2016 年為減少
(3) 總就業人口約 1000 萬，男性農業就業人口皆小於 50 萬(15%)。
(4) 皆多於。
(5) $79.4 - 69.1 = 10.3(千人) = 10300 > 10000$ 人

13. **正解：24**



(1)由圖可知ΔCOB 為等腰三角形 $\therefore \overline{BC} < \overline{OC}$
(2)同(1)
(3)ΔCOB 面積 $= \frac{1}{2}\overline{OB} \times \overline{OC} \times sin30°$
ΔAOB 面積 $= \frac{1}{2}\overline{OA} \times \overline{OB} \times sin60°$
又$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$，故ΔCOB 面積 < ΔAOB 面積
(4)ΔCOB ≅ ΔABC，故∠CAB = 30°
(5)三角形腰變短，由餘弦定理，角度> 30°

第貳部分：選填題

A. 正解：300

詳解：

售價	成本	利潤=售價-成本
1000	200	800
600	200	400
400	200	200
300	200	100

B. 正解：$\frac{1}{9}$

詳解：黑黑黑：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，白白白：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

機率：$\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$

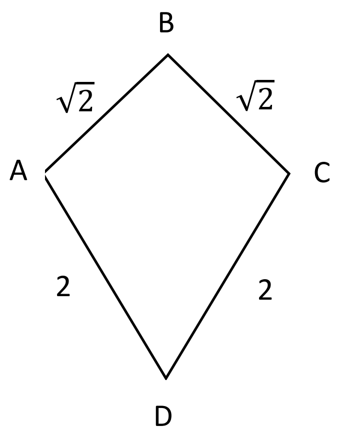
C. 正解：-5

詳解：$2x+y=10$ 與兩平行線 $x-2y+15=0$ 和 $x-2y=0$ 的交點分別為$(1,8)$與$(4,2)$
將$(1,8)$代入，即可求得 $3x-y=c$ 之最小值 $c=-5$

D. 正解：$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

詳解：因∠BAD=135°，依餘弦定理可知 BD 線段長為$\sqrt{10}$，$\cos\angle DBC=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$sin\angle DBC=\frac{\sqrt{5}}{5}$

AC 線段長 $=2BC\times\sin\angle DBC=\frac{2\sqrt{10}}{5}$



E. 正解：(-3,-1,-2)

詳解：$\overrightarrow{BC}=(-2,2,-2)$

設 BC 直線上的一點 M 為(2-2t,-6+2t,3-2t)

$\overrightarrow{AM}=(1-2t,-13+2t,1-2t)$

$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$，$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$-2(1-2t)+2(-13+2t)-2(1-2t)=0$

$t=\frac{5}{2}$

可知 M 點座標為(-3,-1,-2)

F. 正解：$\frac{5}{56}$

詳解：假設拋物線方程式為$x=ky^2$

此拋物線過兩點(t,2)與(t+14,3)

$\begin{cases}t=k\times4\\t+14=k\times9\end{cases}$

可解得$k=\frac{14}{5}$ 焦距=$\frac{1}{4k}=\frac{5}{56}$

G. 正解：$a=\frac{1}{6}$，$b=3$

詳解：∠QPT=120°，扇形 QPT 之面積為$\frac{4}{3}\pi$，三角形 QPT 之面積為$\sqrt{3}$

半圓 QRT 之面積為$\frac{3}{2}\pi$，弓形 QST 面積=$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

灰色區域面積=半圓 QRT − 弓形 QST $=\frac{1}{6}\pi+\sqrt{3}$

故$a=\frac{1}{6}$，$b=3$