110 學年度學科能力測驗
數學考科解析

一、單選題

1. 【答案】(2)

$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}1&8\\0&9\end{bmatrix}$，$A^4=(A^2)^2=\begin{bmatrix}1&80\\0&81\end{bmatrix}$，故 $a+b+c+d=162$，選(2)。

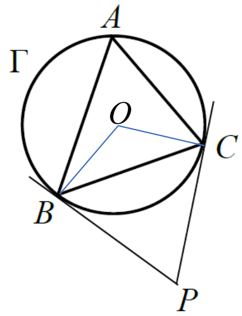
2. 【答案】(1)

因為 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$ 或 $\dfrac{1}{2}$，故 $\dfrac{a_5}{a_1}$ 可能為 $2^4,2^2,2^0,2^{-2},2^{-4}$，但 $a_1=\log_{10}36$ 且各項都大於 1，而

$\dfrac{\log_{10}36}{4}=\dfrac{\log_{10}6}{2}<1$，所以不可以是 $2^{-2},2^{-4}$，因此共 3 種可能，選(1)。

3. 【答案】(3)

若圓心為 O，連 $\overline{OB},\overline{OC}$，因 $\angle OBP=\angle OCP=90^\circ$，所以 $\angle BOC=180^\circ-\theta$，由圓周角與圓心角的關係，$\angle BOC=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{180^\circ-\theta}{2}=90^\circ-\dfrac{\theta}{2}$，$\cos A=\cos(90^\circ-\dfrac{\theta}{2})=\sin\dfrac{\theta}{2}$，故選(3)。



4. 【答案】(5)

$\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{a}+2\vec{b}\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}2\vec{a}\\ 2\vec{b}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\vec{a}\\ \vec{a}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{b}\\ 2\vec{b}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{b}\\ \vec{a}\end{vmatrix}\right|=3\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{vmatrix}\right|=6$，故 $\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{vmatrix}\right|=2$；

又 $\left|\begin{vmatrix}3\vec{a}+\vec{b}\\ \vec{a}+3\vec{b}\end{vmatrix}\right|=\left|\begin{vmatrix}3\vec{a}\\ 3\vec{b}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3\vec{a}\\ \vec{a}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{b}\\ 3\vec{b}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{b}\\ \vec{a}\end{vmatrix}\right|=8\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{vmatrix}\right|=16$，故選(5)。

5. 【答案】(4)

因 $f(x)$ 為三次函數，由題可設 $(x+1)f(x)=(x^3+2)(ax+b)+(x+2)$，則

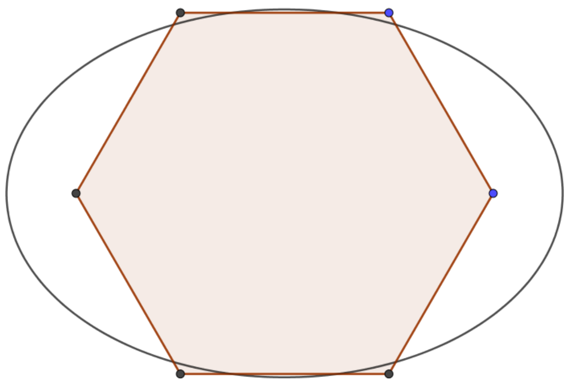
$x=0 \Rightarrow f(0)=4=2b+2 \Rightarrow b=1$；

$x=-1 \Rightarrow 0=(-a+b)+1 \Rightarrow a=2$；

$x=2 \Rightarrow 3f(2)=10\cdot 5+4=54 \Rightarrow f(2)=18$，故選(4)。

6. 【答案】(5)

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$：$a=4, b=\sqrt{7} \Rightarrow c=3$ 為以 A、D 為焦點的橢圓，$\overline{BA}=3, \overline{BD}=3\sqrt{3}$，故 B 至兩焦點的距離之和為 $3+3\sqrt{3}>8=2a$，故 B 在橢圓外，圖形如圖所示，因此共有 8 個交點，故選(5)。



7. 【答案】(2)(3)(4)

(1)可能性為 0.4；

(2)可能性為 0.6；

(3) 6 的可能性為 0.6，8 的可能性為 0.6，9 的可能性為 0.5；

(4) $\dfrac{0.4}{0.4+0.3+0.2}=\dfrac{4}{9}$

(5) $\dfrac{0.5}{0.2+0.1+0.5}=\dfrac{5}{8}<\dfrac{2}{3}$

故選(2)(3)(4)。

8. 【答案】(3)(5)

(1) 圖形對稱於原點，故另一交點是$(-3,-4)$；

(2) 斜率為$\frac{4}{3}$；

(3) 因$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$，所以 O、A、C、B 為平行四邊形，而$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=5$，所以三角形 OAC 是正三角形，得$\angle AOC=60^\circ$；

(4) 因 O、A、C、B 為平行四邊形，故$\Delta ABC=\Delta OAC=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 5^2=\frac{25}{4}\sqrt{3}$；

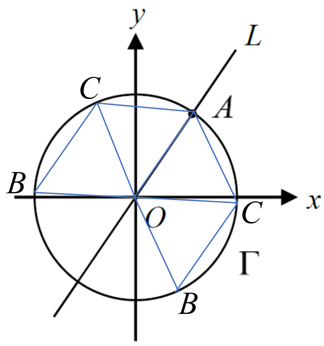
(5) 因$A(3,4)$，可知$\overline{OA}$與 x 軸正向的夾角θ介於30°與60°之間，

分兩情形討論：

若 C 在第二象限，則$\overline{OB}$與 x 軸正向的夾角為$\theta+60^\circ+60^\circ<60^\circ+60^\circ+60^\circ=180^\circ$，因此 B 也在第二象限；

若 C 在第四象限，則$\overline{OB}$與 x 軸正向的夾角$\theta-60^\circ-60^\circ>30^\circ-60^\circ-60^\circ=-90^\circ$，因此 B 也在第四象限。(如圖所示)

故選(3)(5)。



9. 【答案】(2)(3)(4)

依題意，甲獲得$0.4x+0.55y$的選票，乙獲得$0.6x+0.45y$的選票。

因此甲當選的充分必要條件是$0.4x+0.55y>0.6x+0.45y\Leftrightarrow y>2x$，因此若要能決定當選人，就要能判斷「$y>2x$」是否一定成立或不成立。

(1) 僅知道$x+y$不能判斷 y 與 $2x$ 的大小；

(2) $\frac{x}{y}<\frac{1}{2}\Rightarrow y>2x$

(3) $x>y\Rightarrow 2x>y$

(4) $0.4x>0.55y\Rightarrow x>\frac{11}{8}y\Rightarrow 2x>y$

(5) $0.45y>0.6x\Rightarrow x<\frac{3}{4}y$，此情形無法判斷是否有$2x>y$或$2x<y$。

故選(2)(3)(4)。

10. 【答案】(1)(2)

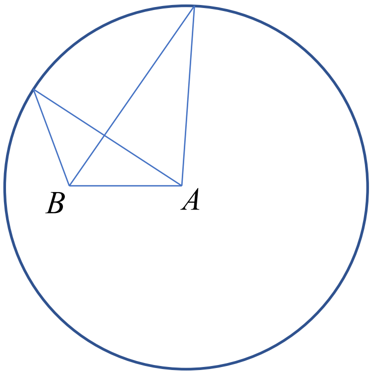
固定 A、B 的位置之後，所有 C 點所形成的圖形是以 A 為圓心，6 為半徑的圓。

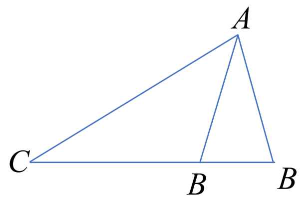
(1) 給定角 A 後，三角形 ABC 只有一種可能的形狀；

(2) 給定角 B 後，三角形 ABC 只有一種可能的形狀；

(3) 給定角 C 時，有兩種可能的形狀，如下圖左；

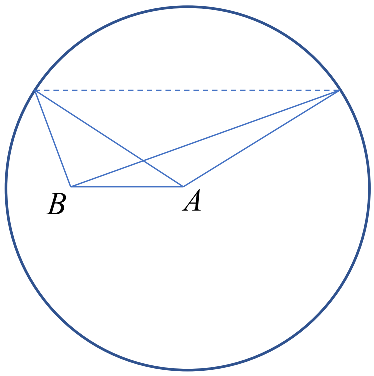
也可利用 SSA 條件判斷，如下圖右。





(4) 給定面積相當於給定 C 到 $\overline{AB}$ 的距離，在此圓上顯然有兩種可能形狀，如下圖；

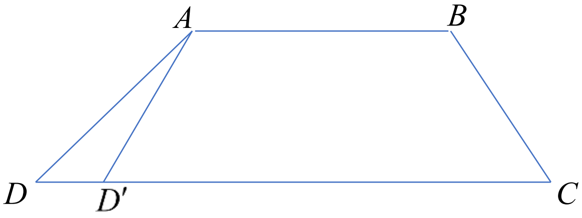
或是由面積公式知條件等價於給定 $\sin A$，但此時 A 有兩種可能。



(5) 由正弦定理，這等價於給定 $\sin B$ 與 $\sin C$，此時同樣 B 有兩種可能。

故選(1)(2)。

11. 【答案】(1)(2)(5)



(1)如右圖，作等腰梯形 $ABCD'$，此時 $\angle D'AB=\angle CBA$；
而 $\angle DAB>\angle D'AB$，故有 $\angle A>\angle B$；

(2)同上(1)，此時有 $\angle B+\angle C=180^\circ=\angle B+\angle AD'C>\angle B+\angle D$，因此 $\angle B+\angle D<180^\circ$；

作平行四邊形 $ABED$，則 $\overline{BE}=\overline{BC}+1$，所以 B 點所成圖形為以 C、E 為焦點，$2a=1$ 的右半雙曲線，如下示意圖。

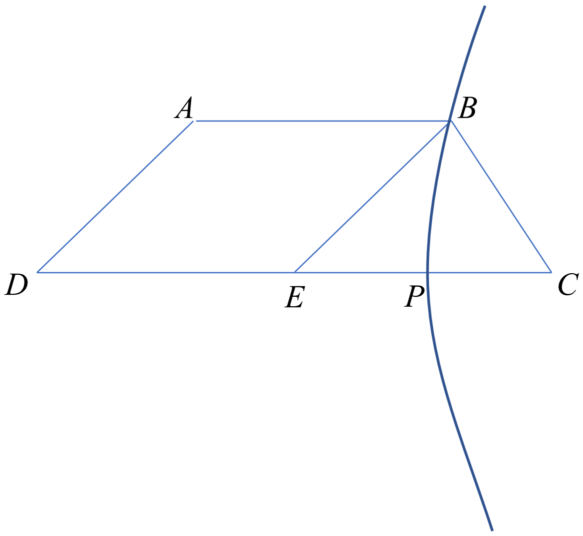
(3) 由圖可知，當 B 向雙曲線的右上方移動，$\angle ABC$ 可能為銳角，所以此時 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$

(4) 設 P 是雙曲線的頂點，$\overline{EP}=\overline{CP}+1$，而 $\overline{CE}=15-10=5$，所以 $\overline{EP}=3,\overline{CP}=2$，得知

$\overline{BC}>\overline{BP}=2$，所以 $\overline{BC}$ 不能是 2；

(5) 因 $\overline{CD}=15$，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}<30$ 等價於 $\overline{CB}$ 在 $\overline{CD}$ 的投影長 <2，而因 $\overline{CP}=2$，所以投影長確實 <2。

故選(1)(2)(5)。



12. 【答案】(2)(5)

全部的排法有 $\dfrac{7!}{2!2!3!}=210$；

先算 A：2 顆黑球相鄰的排法，即將 2 顆黑球看成一體，因此排列有 $\dfrac{6!}{2!3!}=60$ 種，得到 $P(A)=\dfrac{60}{210}=\dfrac{2}{7}$；而注意到 B 是 A 的餘事件，因此 $P(B)=\dfrac{5}{7}$。

(1) $\dfrac{2}{7}<\dfrac{5}{7}$；

(2) 用插間格計算：$\dfrac{4!}{2!2!}\times C^5_3=60$，故 $P(C)=\dfrac{60}{210}=\dfrac{2}{7}$；

(3) 因為 A、B 是樣本空間的分割，

$\frac{2}{7}=P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=\frac{2}{7}P(C|A)+\frac{5}{7}P(C|B)$，因此

$2P(C|A)+5P(C|B)=2$；

(4) $P(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}$，其中 $P(C\cap A)=\frac{\frac{3!}{2!}\times C_3^4}{210}=\frac{2}{35}$，因此 $P(C|A)=\frac{\frac{2}{35}}{\frac{2}{7}}=\frac{1}{5}=0.2$；

(5) $2P(C|A)+5P(C|B)=2\Rightarrow P(C|B)=\frac{2-0.4}{5}=0.32>0.3$。

故選(2)(5)。

13. 【答案】(2)(3)(5)

(1) $x^3+ax^2+bx+c=x^2+100$ 是實係數三次多項式方程式，因此必有實根；

(2)由條件可得 $f(0)$ 和 $f(1)$ 異號，$f(0)$ 和 $f(2)$ 同號，所以 $f(1)$ 和 $f(2)$ 異號，由勘根定理，在 0 和 1 之間有實根，在 1 和 2 之間也有實根，故由虛根成對定理，第三個根也是實數，所以 $f(x)=0$ 必有三相異實數根；

(3) 由虛根成對定理，$1-3i$ 也是該方程式的根，故 $(x-(1+3i))(x-(1-3i))=x^2-2x+10$ 是 $f(x)$ 的因式，故可設 $f(x)=(x^2-2x+10)(x+k)$，此時常數項是$10k$，必須是有理數，因此 k 也是有理數，得 $f(x)=0$ 有一個有理根；

(4) 三次函數的圖形和直線不可能有四個交點（恆等定理、代數基本定理），而如果 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 是等差數列，$(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4))$ 落在一直線上，所以這不可能；

(5) 先利用插值法，可以先求得一三次函數 $g(x)$ 使得 $g(1)=1, g(2)=2, g(3)=4, g(4)=8$，由拉格朗日插值法（或是由牛頓插值法）的公式，可以知道 $g(x)$ 的係數都是有理數，此時將 $g(x)$ 除以它的領導係數，即為題目所求的 $f(x)$。

故選(2)(3)(5)。

A. 【答案】37

一個週期移動 $4\times6=24$ 單位長，所以 4 個週期後移動到 96 的位置，此時還差 20 單位，需再 5 秒，故總共需要 $8\times4+5=37$ 秒。

B. 【答案】$x-6y+4z=0$

E 的法向量同時與 L_1 和 L_2 的方向向量垂直，計算方向向量之外積：

$(2,-3,-5)\times(0,2,3)=(1,-6,4)$，故可設 E 的方程式為 $x-6y+4z=k$，而取 L_1 上的一點 $(0,0,0)$代入得 $k=0$，所以 E 的方程式是 $x-6y+4z=0$。

C. 【答案】$\dfrac{1}{14}$

總共有 $C_3^9=84$ 種選法，其中若要三數相乘為完全平方數，那麼不可能選到 5 和 7，接著討論三數中最小者：

最小數是 1，有$(1,2,8)$、$(1,4,9)$兩種；

最小數是 2，有$(2,3,6)$、$(2,4,8)$、$(2,8,9)$三種；

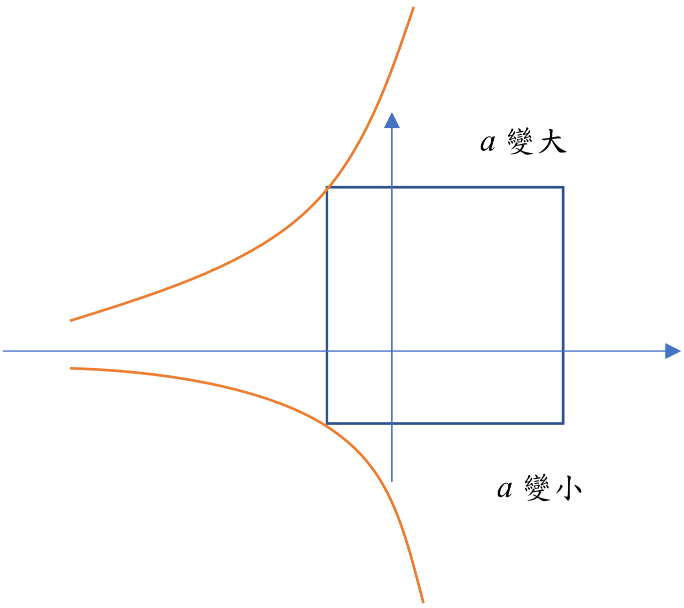
最小數是 3，有$(3,6,8)$一種；

最小數是 4 以上都不可能；

因此總共有 6 種，故機率是$\dfrac{6}{84}=\dfrac{1}{14}$。

D. 【答案】$-2\le a\le 6$

正方形的四個頂點是$(-1,3)$、$(3,3)$、$(3,-1)$和$(-1,-1)$，如圖得知 a 最大時函數圖形通過$(-1,3)$，此時$3=a\times 2^{-1}\Rightarrow a=6$；$a$ 最小時函數圖形通過$(-1,-1)$，此時$-1=a\times 2^{-1}\Rightarrow a=-2$。

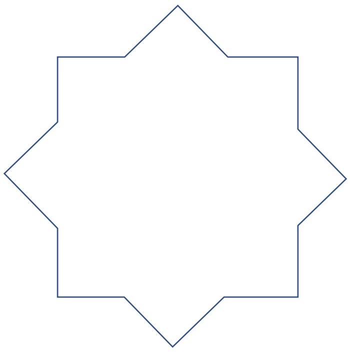


E. 【答案】$(2,56)$

$\left(\sqrt[3]{49}\right)^{100}=7^{\frac{200}{3}}$，取對數得$\log 7^{\frac{200}{3}}=\dfrac{200}{3}\log 7\approx\dfrac{200}{3}\cdot 0.8451\approx 56.34$，所以 $n=56$ 且 $\log a\approx 0.34$，而$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，所以 $2<a<3$，得 $m=2$。

F. 【答案】$8+4\sqrt{2}$

圖形可以看成一個邊長為$2+\sqrt{2}$的正方形，再加上四個底邊為 1 的等腰直角三角形，得面積為$(2+\sqrt{2})^2+4\times\frac{1}{2}\times 1^2=8+4\sqrt{2}$。



G. 【答案】$4\sqrt{2}$

在三角形 ABC 中由餘弦定理，得$\overline{BC}^2=(4\sqrt{6})^2+(4\sqrt{6})^2-2\cdot 4\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{6}\cdot\frac{1}{3}=128$，即

$\overline{BC}=8\sqrt{2}$，故三角形 BCD 是等腰直角三角形。

因為$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$，所以 A 在底面上的投影點為 BCD 的外心，即$\overline{BC}$中點 M，由此可知

$\overline{AM}\perp$底面 BCD，得$\overline{DM}\perp$平面 ABC，所以所求距離即$\overline{DM}=4\sqrt{2}$。