105 學年度學科能力測驗

數學考科解析

壹、選擇題

一、單選題

1. **答：**(3)

解： 令 $f(x)=a(x-2)^2+1$

$f(3)=a\cdot 1^2+1=3\Rightarrow a=2$

$f(1)=2(1-2)^2+1=3$

2. **答：**(5)

解： $\sin 146^\circ=\sin 34^\circ$

$\sin 219^\circ=-\sin 39^\circ$

$\sin 292^\circ=-\sin 68^\circ$

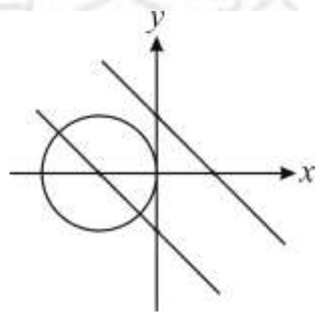
$\sin 365^\circ=\sin 5^\circ$

$\Rightarrow \sin 73^\circ>\sin 34^\circ>\sin 5^\circ>\sin 219^\circ>\sin 292^\circ$

中位數為 $\sin 5^\circ=\sin 365^\circ$

3. **答：**(2)

解： $(x+y)^2=1\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$



由圖可知 2 交點

4. **答：**(1)

解： A 經過了 $120\div 7.5=16$ 次半衰期

原先 A 的質量為 B 的兩倍，120 小時後質量相同

所以 B 只經過 $16-1=15$ 次半衰期

$120\div 15=8$

B 的半衰期為 8 小時

5. **答：**(2)

解：設 P 經過 5 秒後的坐標為 $\left(1+5v,1+10v,1+10v\right)$ 代入 $x-y+3z=28 \Rightarrow v=1$

坐標為 $\left(6,11,11\right)$

由於 $\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{b}\right|$

假設經過 h 秒到達 $x=2$

$6-2h=2 \Rightarrow h=2$(秒)

6. **答：**(4)

解：設首項 a_1，公比 r

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1\left(1-r^{10}\right)}{1-r}=80\cdots\cdots① \\ \dfrac{a_1\left(1-r^{10}\right)}{1-r^2}=120\cdots\cdots② \end{cases} \Rightarrow \frac{①}{②}:r=\frac{-1}{3}$$

$$a_1=80\times\frac{4}{3}\times\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^{10}}\approx 106.67$$

二、多選題

7. **答：**(2)(3)(5)

解：利用三角不等式

(1)(2)$|x|+|x-5|\ge|x-x+5|=5$

(3)(4)(5)$-5\le|x|-|x-5|\le5$

8. **答：**(1)(2)(4)

解：(1)$130<45\times3=135$

(2)單價依序為 18,16.6,16.25,15.83

(3)最多可以買 31 顆蘋果(80 元 5 袋，100 元 1 袋)

(4)甲商場最低金額為 370 元，乙商場最低金額為 380 元

(5)10 顆時，甲商場要 430 元，乙商場只要 420 元

9. **答：**(3)(5)

解：令點$(0,0,t)$代入，沒有交點即為平行或歪斜

其中L_4為平行

應選(3)(5)

10. **答：**(1)(4)(5)

解：(1)代入正數必大於0，無解

(2)(3)無法判定

(4) $f(1)+f(-1)=6+2b=2(3+b)$，必為偶數

(5) $f(0)=2>0$

$f(-1)=-a-c+b+3<0$

由堪根定理可知，-1與0之間至少1根

11. **答：**(1)(2)(4)

解：(1) $40\log_{10}\left(\dfrac{9+1}{10}\right)+60=60$

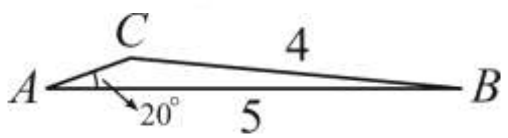
(2) $40\log_{10}\left(\dfrac{20+1}{10}\right)+60>72$必超過$70$分

(3)反例：所有人成績相同，全距不變

(4)皆為遞增，順序不變

(5)非線性轉換

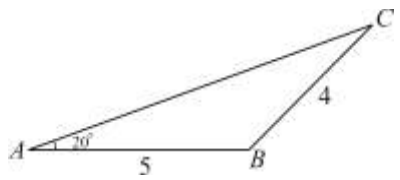
12. **答：**(2)(5)



解：(1)(3)(4)值不唯一

(2)兩圖$\angle C$互補，正弦值不變

(5) $2R=\dfrac{\sin 20^\circ}{4}$為定值，唯一



13. **答：**(4)(5)

解：(1) $P\left(A\text{抽到甲}\right)=\dfrac{1}{4}$，$P\left(C\text{抽到甲}\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

(2) $P\left(D\text{抽到甲}\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{4}$

(3) $P\left(A\text{抽到乙}\right)=\dfrac{1}{4}$，$P\left(B\text{抽到乙}\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$

(4) $P\left(B\text{抽到丙}\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$，$P\left(C\text{抽到丙}\right)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{24}$

(5) $P\left(C\text{抽到甲}\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$，$P\left(C\text{抽到乙}\right)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{24}$

貳、選填題

A. **答：** 42

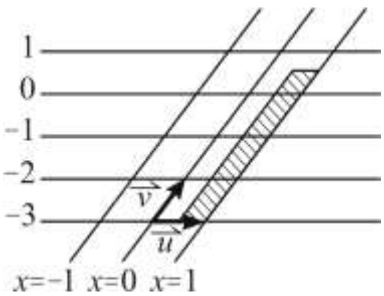
解：第一列有 $2^3-1=7$ 種可能(扣掉 $0,0,0$)

第二列不能與第一列相同，有 $7-1=6$ 種可能

所有的組合為 $6\times 7=42$ 種

B. **答：** $\dfrac{7}{2}$

解： $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 所形成的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\right|=2$



所求面積為 $\dfrac{1}{2}\times 3+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$ 個平行四邊形的面積

面積為 $\dfrac{7}{4}\times 2=\dfrac{7}{2}$

C. **答：** $1+\sqrt{5}$

解： 令焦距 c，半長軸 a，半短軸 b

$$\begin{cases} 2c=2 \\ a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2-a-1=0 \Rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}\text{（負不合）} \\ \dfrac{2b^2}{a}=2 \end{cases}$$

$$2a=1+\sqrt{5}$$

D. **答：** $(1,1,4,-2)$

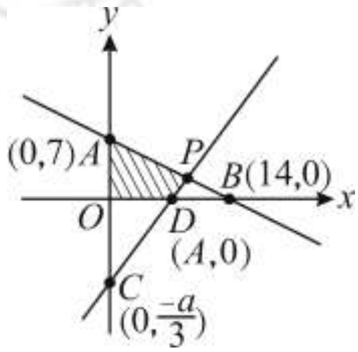
解：
$$\begin{cases} x+2y+3z=0\cdots\cdots① \\ 2x+y+3z=6\cdots\cdots② \\ x-y=6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③ \\ x-2y-z=8\cdots\cdots\cdots④ \end{cases}$$

$$③-④: y+z=-2 \Rightarrow c=1, d=-2$$

$$\frac{2\times②-①}{3}: x+z=4 \Rightarrow a=1, b=4$$

$$(a,b,c,d)=(1,4,1,-2)$$

E. **答：** 6



解： 利用 $\triangle ABO-\triangle BDP=\dfrac{213}{5}$

大 $\triangle ABO$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times 7\times 14=49$

$\triangle BPD$ 面積為 $49-\dfrac{213}{5}=\dfrac{32}{5}$

P 點的 y 坐標為 $\begin{cases} x-3y=a \\ x+2y=14 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{14-a}{5}$

$\triangle BPD$ 面積 $\Rightarrow \dfrac{1}{2}\times\dfrac{14-a}{5}\times(14-a)=\dfrac{32}{5}$

$\Rightarrow (14-a)^2=64 \Rightarrow 14-a=\pm 8 \Rightarrow a=6, 22$（22 不合）

F. **答：** $\dfrac{19}{36}$

解： $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0$

$P(b\text{為奇數}) = \dfrac{1}{2}$

$P(b\text{為奇數且}ac - b^2 > 0) = \dfrac{35+19+3}{6\times 36} = \dfrac{19}{72}$

所求為 $\dfrac{\frac{19}{72}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{19}{36}$

G. **答：** $\dfrac{4}{3}$

解： $\overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + a\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE}\right)$

$= \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{AG} + a\left(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{3} - a\right)\overrightarrow{AB} + (2-a)\overrightarrow{AD} + a\overrightarrow{AG} \Rightarrow \dfrac{1}{3} - a + 2 - a + a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{4}{3}$